

テイラーと見る松高からの風景

SS 数学探究Ⅱ 2年8組 岸川涼

概要

松高の周りの景色を見ていたとき、松高の屋上からどこまで見えるのか興味を持ったので調べてみることにした。地球の半径と目線の高さを決め、地平線までの距離公式に代入する。

序文

地平線・水平線までの距離公式
地球の半径を R 、観測地点の高度を h とする。
この時の水平線までの距離を l とすると、
$$l \approx \sqrt{2Rh}$$

求めるために テイラー展開 を利用した近似値を出す。

(近似式) $\theta \approx 0$ のとき $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

(証明) 関数 $\cos \theta$ は θ を変数として、
$$\cos \theta = a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + e\theta^4 \dots \text{---①}$$

のように表せることが知られている。
まず、 $\theta = 0$ を代入する。 $a = 1$
次に、①式の第1次導関数を求めると、
$$-\sin \theta = b + 2c\theta + 3d\theta^2 + 4e\theta^3 \dots$$

 $\theta = 0$ を代入すると $b = 0$
②式の第2次導関数を求めると、
$$-\cos \theta = 2c + 6d\theta + 12e\theta^2 \dots$$

 $\theta = 0$ を代入すると $c = -\frac{1}{2}$
 a, b, c の値を①に代入すると、
$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + d\theta^3 + e\theta^4 \dots$$

 $\theta \ll 1$ より、 $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

地平線・水平線までの距離公式を証明する。

(証明) 図のようにすると、

$$l = R\theta \quad \cos \theta = \frac{R}{R+h} \text{---①}$$

$$\text{先ほどの近似式より、} \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \text{---②}$$

$$\text{①、②より、} \quad \frac{R}{R+h} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \theta > 0 \text{ だから } \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R+h}}$$

R は h よりはるかに大きいので、 $R+h \approx R$ と

$$\text{近似すると、} \quad l = R\theta \approx R \sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2Rh}$$

本論

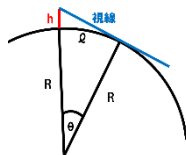
I. 松高からどこまで見えるか

条件：松高の屋上から見るものとする（高さ14mとおく）。そこから身長180cmの人が見晴らす。なお、松高の標高は海拔36mほどであるが、周りの地域の標高も同じぐらいであるため、ここでは考えないものとする。地球は真球であり、平坦とする。地球の半径は6378kmとする。

これらの条件から、先ほどの水平線・地平線までの距離公式に数値を代入する。

したがって、（松高から見える距離）
$$= \sqrt{2 \times (\text{地球の半径}) \times (\text{松高の高さ})}$$

$$= \sqrt{2 \times 6378 \times 0.0148} \approx 14.197 \text{ (km)}$$



よって、松高の屋上から見える地平線の距離は約14kmということが分かる。これは川越市や鴻巣市、熊谷市が見えるぐらいの距離である。具体的なものとしては上越新幹線のレールや、荒川が見えるぐらいの距離である。

II. ある地点から松高が見えるか

- ① 東京タワーから松高が見えるか
東京タワーの特別展望台（250m）から見るとする。
公式に $R = 6.37 \times 10^3$ 、 $h = 250.0 \times 10^{-3}$ を代入。
よって、（東京タワーから見える距離）
$$= \sqrt{2 \times 6.378 \times 10^3 \times 250.0 \times 10^{-3}}$$

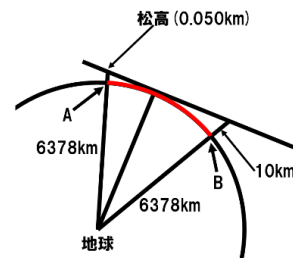
$$= 56.44 \text{ km}$$

東京タワーから松高まで53kmほどあるので条件が良ければ見ることが出来る。
- ② 東京スカイツリーから松高は見えるか
東京スカイツリー展望回廊（450m）から見るとする。同様に公式に代入して解くと、
（東京スカイツリーから見える距離）= 75.72km
二つの距離は約50kmなので、見ることが出来る。
- ③ 富士山から松高は見えるか
富士山頂上（3776m）で見るとする。同様に式を解くと、
（富士山から見える距離）= 219.13km
富士山と松高の距離は93kmなので十分に見られることが分かる。

III. 地球上のどこまでなら松高が見えるか

条件：「地球上」とは、10km以内とする。なお、地球は真球で、平坦とする。松高の標高（34m）を考える。

この図より、この弧ABの長さを求める。松高から見た地平線の長さとして10km上空から見たときの地平線の長さの和となるから、
（赤線の長さ） $= \sqrt{2 \times 6378 \times 0.050} + \sqrt{2 \times 6378 \times 10} = 382.4 \text{ (km)}$



よって、松高から見る地平線のすぐ上の空は地球上で382.4km離れた10km上空となる。

このことから、松高から見える空に雲が見えない条件は松高を中心に382.4kmの範囲に雲が存在しないことである。

また、地上で382.4km離れた上空10kmのところを航行する飛行機から松高を見ることが出来る。

まとめ

これまでの研究で以下のことが分かった。

- ① 松高の屋上からは約14kmの範囲を見ることが出来る。
- ② 東京タワー、東京スカイツリー、富士山から松高を見ることが出来る。
- ③ 松高からは約380km離れた地点の空を見ることが出来る。

反省と展望

今回の研究では松高の屋上からどれぐらいの範囲が見え、見られるのかを調べることが出来た。ほかの条件をあまり加味していなくても、意外と遠くまで見られることに驚いた。松高の屋上からは意外にいろいろなものを見ることが出来るのかもしれない。

参考文献 「高校数学の美しい物語」

https://mathtrain.jp/wp-content/uploads/2015/09/logo_b.gif